לוגיקה מתמטית (1) תשס"ב
תשובות לשאלות הבחינה במועד א'

חלק א'

א. הערך של שם עצם t במבנה $\mathcal{A}$ ובהשמה s מוגדר באינדוקציה באופן הבא:
1) אם t קבוע אישי אז הערך של t ב-$\mathcal{A}$ הוא $t^{\mathcal{A}}$, הפרוש של t ב-$\mathcal{A}$ (ואינו תלוי בהשמה s).
2) אם t משתנה אישי אז הערך של t ב-$\mathcal{A}$ ובהשמה s הוא $s(t)$, כלומר האיבר בעולם של $\mathcal{A}$ שהוא תמונת t תחת ההשמה s.
3) אם $t = F(t_1, \ldots, t_n)$ אז $t^{\mathcal{A},s} = F^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A},s}, \ldots, t_n^{\mathcal{A},s})$.

ב. ראשית נכתוב את הטענה האומרת שכל צומת צבוע בדיוק בצבע אחד:
$\phi_1 = \forall x(R(x) \leftrightarrow \neg B(x))$.
שנית, כדי לקבל את הטענה האומרת שזוג שכנים אינם צבועים באותו הצבע די, לאור הפסוק הקודם, לומר שבדיוק אחד מהם צבוע אדום: $\phi_2 = \forall x \forall y(G(x, y) \rightarrow (R(x) \leftrightarrow \neg R(y)))$.
שלישית, כל צומת מחובר לשני צמתים לפחות: $\phi_3 = \forall x \exists y \exists z(y \not\approx a \wedge G(x, y) \wedge G(x, z))$.
לבסוף, הפסוק המבוקש הוא $\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \phi_3$.

ג. אם $\phi(R)$ אמיתית לוגית, היא אמיתית בכל מבנה לשפה, ובפרט בכל מבנה בו R מתפרש כזהות, לכן בפרט $\phi(\approx)$ אמיתית לוגית. הכיוון השני בוודאי אינו נכון, לדוגמה, בשפת הטיבעיים הפסוק $\exists x(x \approx 0)$ אמיתי לוגית, אך הפסוק $\exists x(x < 0)$ אינו אמיתי במבנה התיקני של הטבעיים (עם הפרוש הרגיל של יחס הסדר).

ד. מכיוון שבעולם יש איבר יחיד יש רק אופן אחד בו ניתן לפרש פונקציה דו מקומית על העולם $F(1, 1) = 1$, ושני אופנים בדיוק לפרש יחס דו מקומי על העולם, או $R(1, 1) = T$ או $R(1, 1) = F$. מכיוון שהמבנה נקבע ע"י העולם וע"י הפרושים לפונקציות וליחסים בשפה נקבל שיש בדיוק שני מבנים שונים לשפה ולעולם הנתונים.

חלק ב'

2. תהי A קבוצה כלשהי. נראה כי ניתן להגדיר על A יחד סדר מלא. תהי $L = \{P_{a,b} : a, b \in A\}$ שפה לתחשיב הפסוקים. נחשוב על פסוק יסודי $P_{a,b}$ ב-L כ"אומר" ש- $a < b$. תהי Γ קבוצת הפסוקים לשפה L המכילה את הפסוקים הבאים:
א. $\neg P_{a,a}$ **לכל** $a \in A$.
ב. $P_{a,b} \vee P_{b,a}$ **לכל** $a, b \in A$, $a \neq b$.
ג. $P_{a,b} \wedge P_{b,c} \rightarrow P_{a,c}$ **לכל** $a, b, c \in A$.
עתה יספיק להראות את הטענות הבאות:
- Γ עקבית מקומית.
- ממודל ל-Γ ניתן להגדיר על A סדר מלא.

זה יספיק משום שממשפט הקומפקטיות אם Γ עיקבית מקומית היא עיקבית, ולכן יש לה מודל, ולכן ניתן להגדיר על A סדר מלא.

כעת הוכחת שתי הטענות לעיל היא קלה. לפתרון מלא של שאלה כללית יותר ראה את התשובה לשאלה 4ג' של תרגיל 7 של תלמידי פרופ' לוי.

3. נוכיח את הטענה לשפה בלי שוויון. תהי T קבוצת שמות העצם הקבועים בשפה. יהי A המבנה הבא:

א. עולמו של A הוא T (זיכרו שהעולם של מבנה הוא קבוצה לא ריקה, ובפרט ניתן לבחור את T כעולם של המבנה. חשוב עם זאת לא לבלבל בין שמות העצם הקבועים בשפה, כעצמים סמנטיים, לבין תפקידם כאיברים בעולם).

ב. לכל סימן פונקציה F בשפה נגדיר $F^{\mathcal{A}}(t_1 \dots t_n) = F(t_1 \dots t_n)$ (כלומר, אם $t_1 \dots t_n \in T$ אז הערך במבנה $\mathcal{A}$ של תוצאת ההפעלה של F על איברים אלו יהיה האיבר ב-T שהוא שם העצם הקבוע $F(t_1 \dots t_n)$ הנמצא ב-T.

ג. לכל סימן יחס R נגדיר $R(t_1 \dots t_n) \in \Gamma \ \leftrightarrow \ R^{\mathcal{A}}(t_1 \dots t_n) = T$.

עתה, צריך להראות כי A מודל ל-Γ. נראה זאת באינדוקציה על המספר הכולל של קשרים לוגים וכמתים המופיעים בפסוק (היכן תיכשל ההוכחה אם ננסה להוכיח את הטענה באינדוקציה על יצירת הנוסח?):

- ראשית, קל לוודא באינדוקציה על יצירת שם העצם, שלכל שם עצם קבוע t מתקיים $t^{\mathcal{A}} = t$ (כלומר, הערך של שם העצם t במבנה $\mathcal{A}$ הוא שם העצם הקבוע t עצמו - שהוא כזכור איבר בעולם).
- אם $\phi \in \Gamma$ פסוק אטומי אז (בהעדר סימן השוויון) הוא מהצורה $R(t_1 \dots t_n)$, ואז, מההערה האחרונה על פרוש שמות העצם הקבועים ב-A ומהגדרת $R^{\mathcal{A}}$, נובע $\mathcal{A} \models \phi$.
- אם $\neg\phi \in \Gamma$, עבור ϕ מהצורה $R(t_1 \dots t_n)$, אז מכיוון שב-Γ אין פסוק אטומי ושלילתו נובע ש- $\phi \notin \Gamma$, ולכן שוב מהגדרת $R^{\mathcal{A}}$, ומהפרוש של שמות העצם הקבועים ב-$\mathcal{A}$, נקבל $\mathcal{A} \models \phi$.
- אם $\phi = \chi \vee \psi$ אז, מהנתון, $\psi \in \Gamma$ או $\chi \in \Gamma$. בכל אחד מן המקרים קיבלנו פסוק שבו המספר הכולל של קשרים לוגים וכמתים קטן יותר מזה שב-ϕ, ולכן לפי הנחת האינדוקציה, בלי הגבלת הכלליות, $\mathcal{A} \models \chi$, ולכן, מהגדרת הקשר $\vee$, נובע $\mathcal{A} \models \phi$.

באופן דומה מאוד מטפלים ביתר המקרים של קשרים לוגיים.

- אם $\phi = \exists x \psi(x)$, אז מהנתון יש איזה שם עצם קבוע c כך ש- $\psi(c) \in \Gamma$. שוב, ב-$\psi(c)$ מספר קטן יותר של קשרים לוגים וכמתים מאשר ב-ϕ ולכן, מהנחת האינדוקציה, $\mathcal{A} \models \psi(c)$. לפי ההערה שלנו על הפרוש לשמות העצם הקבועים במבנה ולפי הגדרת הסיפוק לכמת $\exists$ זה אומר ש- $\mathcal{A} \models \phi$. הטיפול במקרה של הכמת הכולל דומה.

הערה: ההוכחה למקרה עם שוויון דומה פרט לכך שיש לעבוד במבנה המנה $\mathcal{A}/\approx^{\mathcal{A}}$.

4. לאורך כל הפתרון נשתמש בגרסה הקלה הבאה של המשפט הסמנטי של ההצבה: יהי t שם עצם קבוע, יהי $\mathcal{A}$ מבנה כלשהו ויהי $a = t^{\mathcal{A}}$. אזי לכל נוסחה $\phi(x)$ מתקיים

$$\phi(x)^{\mathcal{A}, s\binom{x}{a}} = \phi(t)^{\mathcal{A}}$$

א. הטענה נובעת ישירות מהמשפט הסמנטי של ההצבה והגדרת ערך האמת של הכמת הכולל: יהי $\mathcal{A} \models \forall x \phi(x)$ (מה קורה אם לא?) אזי לכל השמה s מתתאימה ל-$\phi(x)$ ולכל $a \in A$ מתקיים $\mathcal{A} \models \phi(x)^{s\binom{x}{a}}$, ובפרט $\mathcal{A} \models \phi(x)^{s\binom{x}{c^{\mathcal{A}}}}$, ולפי המשפט הסמנטי של ההצבה זה שקול לכך ש- $\mathcal{A} \models \phi(c)$, כנדרש.

ב. הטענה אינה נכונה. למשל, במבנה המספרים הטבעיים עם הפרוש $c^{\mathcal{N}} = 0$ הפסוק האומר של-c אין קודם מתקיים, אבל כמובן שלא מתקיים שלכל x אין קודם.
ג. זה מקרה פרטי של סעיף א'.
ד. הטענה נכונה: עלינו להראות שלכל מבנה $\mathcal{A}$ לשפה מתקיים $\mathcal{A} \models \forall x\phi(x)$. כלומר, עלינו להראות שבהינתן מבנה $\mathcal{A}$ והשמה $s\binom{x}{a}$ מתקיים $\mathcal{A} \models \phi(x)^{s\binom{x}{a}}$. כעת, מהנתון אנו יודעים שלכל מבנה $\mathcal{B}$ $\mathcal{B} \models \phi(c)$. בפרט נוכל לבחור את $\mathcal{B}$ כך שעולמו זהה לזה של $\mathcal{A}$ וכך שפרוש סימני היחס, הפונקציה והקבועים בו זהה לאלו של $\mathcal{A}$ פרט לכך ש- $c^{\mathcal{B}} = a$. מכיוון ש-c אינו מופיע ב-ϕ נקבל מהגדרת הסיפוק ששינוי הפרוש של c ב-$\mathcal{A}$, אינו משנה את הערך של $\phi(x)^{\mathcal{A},s\binom{x}{a}}$ ולכן $\phi(x)^{\mathcal{A},s\binom{x}{a}} = \phi(x)^{\mathcal{B},s\binom{x}{a}} = \phi(c)^{\mathcal{B}} = T$.

לוגיקה מתמטית (1) תשס"ב
תשובות חלקיות לשאלות הבחינה במועד ב'

חלק א'

1. א. הופעה של משתנה, למשל x, בנוסחה נקראת מכומתת אם היא בטווח של כמת על אותו משתנה, בדוגמה שלנו $\forall x$ או $\exists x$. הופעה של משתנה בנוסחה נקראת חופשית אם אינה מכומתת. משתנה x הוא חופשי בנוסחה ϕ אם יש לו הופעה חופשית ב-ϕ.
כדי לדעת את ערך האמת של נוסחה ϕ אנו זקוקים למבנה $\mathcal{A}$ ולהשמה s למשתנים החופשיים של ϕ. כדי לדעת את ערך האמת של פסוק ψ די לנו במבנה $\mathcal{A}$ כי ערך האמת תלוי רק בערכי ההשמה למשתנים החופשיים של ψ, ול-ψ אין משתנים חופשיים.

ב. תשובה קצרה: כל פסוק בתחשיב היחסים שקול לפסוק שבו לא מופיע אף כמת כולל כי כל הופעה $\forall x$ של הכמת כולל אפשר להחליף ב- $\neg\exists x\neg$.
תשובה מפורטת יותר: מגדירים לכל נוסחה ϕ נוסחה ϕ^* שקולה לה כדלקמן. אם ϕ נוסחה אטומית אז $\phi^* = \phi$. אם $\phi = \neg\psi$ אז $\phi^* = \neg\psi^*$. אם $\phi = \psi \circ \chi$, ו-$\circ$ הוא קשר דו-מקומי בסיסי אז $\phi^* = \psi^* \circ \chi^*$. עבור משתנה x כלשהו, אם $\phi = \exists x\psi$ אז $\phi^* = \exists x\psi^*$ ואם $\phi = \forall x\psi$ אז $\phi^* = \neg\exists x\neg\psi^*$. מוכיחים באינדוקציה על יצירת ϕ כי $\phi \equiv \phi^*$ וכי הנוסחה ϕ^* אינה מכילה אף הופעה של $\forall$.

ג. הדרך הנכונה לגשת לפיתרון היא לנסח תחילה את הנוסחה בשפה מתמטית לא פורמלית, כשהנכם משתמשים רק בקבועים $0, 1$, בפעולות $+$ ו-$\cdot$ וביחס $<$, ואחר כך לתרגם זאת לנוסחה פורמלית של תחשיב היחסים.
נסכים ש-0 ו-1 אינם ראשוניים. מספר x הוא ראשוני אם הוא גדול מ-1 וכל מחלק שלו הוא 1 או x.
$\forall y\forall z(x \approx y \cdot z \rightarrow y \approx 1 \vee y \approx x)$.
הבעייה בחלק השני היא שאסור להשתמש בפעולת החזקה כי היא אינה אחת מפעולות השפה. x הוא חזקה של 2 אם כל מחלק שלו הוא 1 או מספר זוגי.
$\forall y\forall z(x \approx y \cdot z \rightarrow y \approx 1 \vee \exists u(u + u \approx x))$.
טעות נפוצה בתשובה לחלק זה היא שמגדירים ברקורסיה נוסחה $\psi_n(x)$ האומרת ש-x הוא 2^n ע"י $\psi_0(x) = x \approx 1$ ו- $\psi_{n+1}(x) = \exists y(\psi_n(y) \wedge x \approx y + y)$. אבל לא זאת הנוסחה שאנו צריכים.

אלו שטעו כתבו את ההגדרה $\psi(x) = \exists y(\psi(y) \wedge x \approx y+y)$ כאילו זאת היא הגדרה ברקורסיה של ψ, אבל זאת אינה הגדרה ברקורסיה, ואין אף נוסחה המקיימת שוויון זה כי הנוסחה באגף ימין תמיד תהיה ארוכה מן הנוסחה $\psi(x)$ באגף שמאל.

ד. יהיו $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ מבנים בני שני איברים כל אחד לשפה המכילה רק את הקבוע האישי c. נסמן את $\mathcal{A}(c)$, כלומר את הערך של c במבנה $\mathcal{A}$, ב-a_1 ואת האיבר השני של A ב-a_2, וכן נסמן את $\mathcal{B}(c)$ ב-b_1 ואת האיבר השני של B ב-b_2. תהי $H : A \to B$ נתונה ע"י $H(a_1) = b_1$ ו- $H(a_2) = b_2$. H היא איזומורפיזם של $\mathcal{A}$ על $\mathcal{B}$ כי H העתקה חד חד ערכית של A על B וקיים $H(\mathcal{A}(c)) = H(a_1) = b_1 = \mathcal{B}(c)$. כך הוכחנו שכל שני מבנים לשפה זאת הם איזומורפיים.
היו תלמידים שכתבו כי יש שני מבנים $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ שאינם איזומורפיים כאשר $\mathcal{A}(c) = T$ ו- $\mathcal{B}(c) = F$. זאת טעות קשה כי הערך של קבוע אישי במבנה הוא תמיד איבר בעולם של המבנה ולא ערך אמת.

חלק ב׳

2. ראה משפטים 91.4 עד 12.4 בספר לוגיקה מתמטית א׳.

3. א. יהי $\mathcal{A}$ מבנה ו-s השמה כך שכל הנוסחאות של Γ אמיתיות ב-$\mathcal{A}$ וב-s. מכיוון שההשמה s מספקת את $\exists x\phi(x)$ ב-$\mathcal{A}$ לכן, לפי הגדרת האמת, קיים $a \in A$ כך שההשמה $s\binom{x}{a}$ מספקת את ϕ ב-$\mathcal{A}$. יהי $\mathcal{B}$ מבנה שהוא כמו $\mathcal{A}$ רק שהוא מפרש את c כ-a. מכיוון ש-c אינו מופיע בנוסחאות Γ לכן לפסוקי Γ יש ב-$\mathcal{B}$ וב-s אותו ערך אמת כמו ב-$\mathcal{A}$ וב-s ולכן כולן אמיתיות ב-$\mathcal{B}$ וב-s. לפי משפט ההצבה ערך האמת של $\phi(c)$ ב-$\mathcal{B}$ וב-s הוא ערך האמת של $\phi(x)$ ב-$\mathcal{B}$ וב-$s\binom{x}{a}$, כי הערך של c ב-$\mathcal{B}$ הוא a. אולם c אינו מופיע ב-$\phi(x)$ ולכן זהו גם ערך האמת של $\phi(x)$ ב-$\mathcal{A}$ וב-$s\binom{x}{a}$, וראינו שערך זה הוא T. לכן $\phi(c)$ אמיתית ב-$\mathcal{B}$ וב-s, וזה מה שנותר לנו להוכיח.
ב. ראה משפט 11.11 בספר לוגיקה מתמטית א׳.

4. ראה משפט 01.01 בספר לוגיקה מתמטית א׳. שים לב שבקורס ובבחינה דובר רק על נוסחאות מסדר ראשון.